19/11/2015

Διαφορίσεις απεικονίσεις

$F: U \subset \mathbb{R}^n$, U ανοικτό του $\mathbb{R}^n$. Η F καλείται διαφορίσιμη στο $p_0 \in U$ αν-ν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ώστε $\lim_{p \to p_0} \frac{F(p)-F(p_0)-L(p-p_0)}{\|p-p_0\|} = 0$.

Η L είναι μοναδική και καλείται διαφορικό της F στο p_0, συμβολίζεται με $dF_{p_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ $e_i = (0,0,0\dots,\overset{i \text{ θέση}}{1},0\dots0)$

$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ -||- -||- -||- $\mathbb{R}^m$.

Ο πίνακας του διαφορικού dF_{p_0} ως προς αυτές τις βάσεις είναι ο Ιακωβιανός:

$$\begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(p_0) & \dots & \frac{df_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1}(p_0) & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right)$$

→ Αν F είναι C^k, $k \geq 3$ τότε είναι διαφορίσιμη.

Θεώρημα: Εάν $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 απεικόνιση. Αν για $p_0 \in U$ $dF_{p_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι "1-1" ($\Leftrightarrow \ker dF_{p_0} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} dF_{p_0} = n \Leftrightarrow \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_0)\right) \neq 0$) τότε υπάρχει περιοχή $U_0 = U(p_0) \subset U$ και περιοχή $W = W(F(p_0))$ ώστε η $F|_{U_0}: U_0 \to W$ να είναι διαφορομορφισμός.

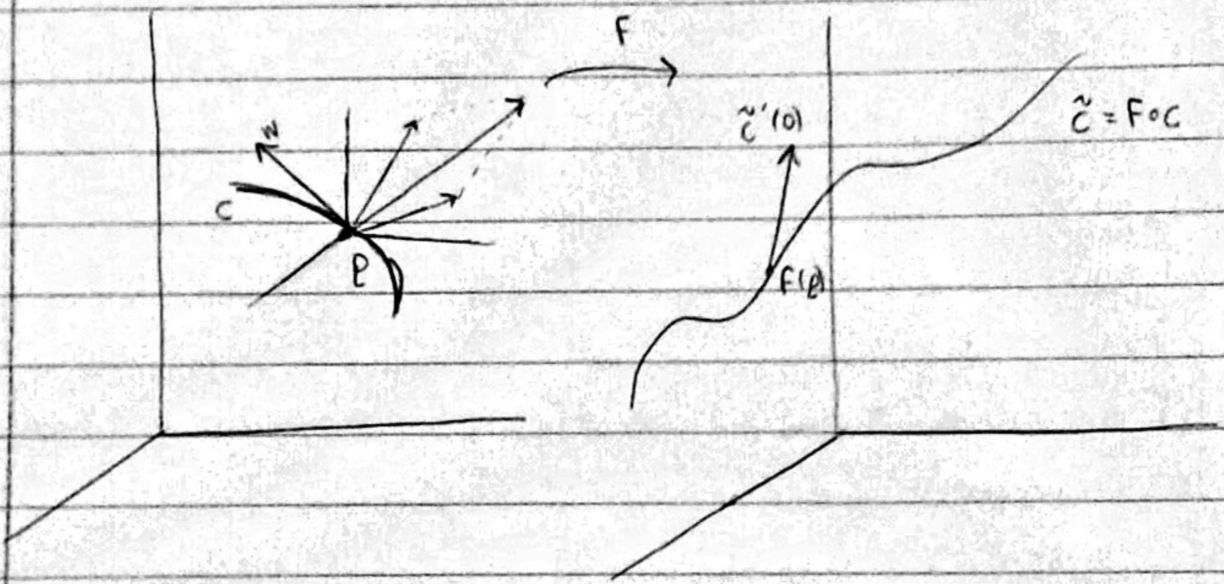
Μια ερμηνεια του διαφορικου:

$F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Θεωρουμε καμπυλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ με $c(0) = p$, $c'(0) = w$

$\tilde{c}(0) = F \circ c(0) = F(c(0)) = F(p)$

Ισχυει οτι $dF_p(w) = \tilde{c}'(0)$



$T_p\mathbb{R}^n$ = συνολο διανυσματων με αφετηρια το p, τοτε εχει δομη διανυσματικού χωρο, ειναι ισομορφη με τον $\mathbb{R}^n$ και καλειται εφαπτομενος χωρος του $\mathbb{R}^n$ στο σημειο p.

Κανονικες Επιφανειες:

Ορισμος: Ενα υποσυνολο $S \subseteq \mathbb{R}^3$ καλειται κανονικη επιφανεια αν-ν

(i) Για καθε σημειο $p \in S$ υπαρχει ανοικτο V του $\mathbb{R}^3$ με $p \in V$ και λεια απεικονιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ επι, U ανοικτο του $\mathbb{R}^2$

$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$.

(ii) Η απεικονιση $X: U \to V \cap S$ ειναι ομοιομορφισμος.

(iii) Για καθε $q \in U$, το διαφορικό $dX_q: T_q\mathbb{R}^2 \to T_{X(q)}\mathbb{R}^3$ να ειναι "1-1"

Ορολογια: Καθε απεικονιση X που πληροί τις (i), (ii), (iii) καλειται παραμετρηση του S ή συστημα συντεταγμενων, (u,v) παραμετροι.

$\forall p \in V \cap S$ υπάρχει μοναδικό $q = (u,v) \in U$ ώστε $p = X(q) = X(u,v)$

Άρα το ζεύγος (u,v) καλείται συντεταγμένες του p ως προς το σύστημα συντεταγμένων X. Το $V \cap S$ ονομάζεται περιοχή συντεταγμένων του X (ανοικτά υποσύνολα της επιφάνειας.

Παρατήρηση: Κάθε ανοικτό υποσύνολο της S είναι ανοικτή επιφάνεια

→ Ο πίνακας του διαφορικού dX_q ως προς τις συνήθεις βάσεις του $T\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ είναι ο

$$JacX(q) = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} \qquad x_u = \frac{\partial x}{\partial u} \qquad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$$

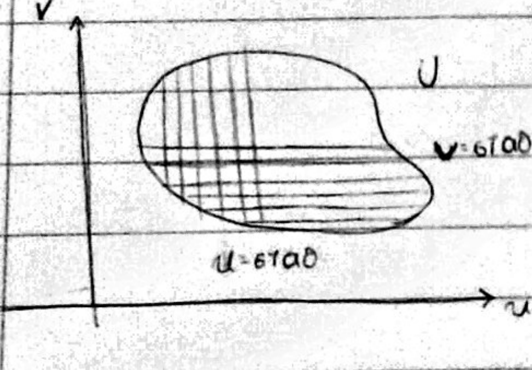
dX_q 1-1 $\iff$ rank $JacX(q) = 2$

$\iff dX_q(e_1), dX_q(e_2)$ είναι γρ. ανεξάρτητα

$\iff X_u(q), X_v(q)$ -"- -"-

(iii) $X_u \times X_v \neq 0$

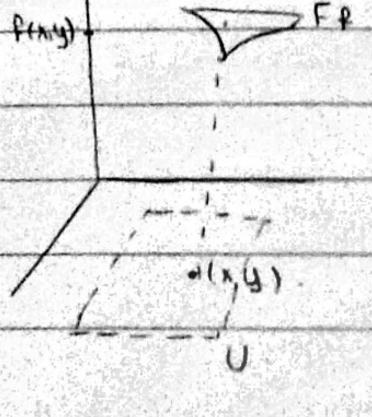
για ελέγχουμε την τρίτη συνθήκη εξετάζουμε το εξωτ. γινόμενο.



$X(u, v = \text{σταθ.})$

$X(u = \text{σταθ}, v)$

Παραδείγματα: (1) Γραφήματα: $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία. Το γράφημα της f είναι το σύνολο $\Gamma_f = \{x, y, f(x,y) / (x,y) \in U\}$.



Ορίζω την την απεικόνιση $X: U \to \Gamma_f \cap V$ επί με $V = \mathbb{R}^3$, με $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ λεία.

$X(u_1,v_1) = X(u_2,v_2) \Rightarrow (u_1, v_1, f(u_1,v_1)) = (u_2, v_2, f(u_2,v_2)) \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X$ "1-1".

$X^{-1}: \Gamma_f \to U$, $X^{-1}(x,y,z)=(u,v) \Leftrightarrow X(u,v)=(x,y,z) \Leftrightarrow (u,v,f(u,v))=(x,y,z)$

$\Leftrightarrow u=x,\ v=y.$

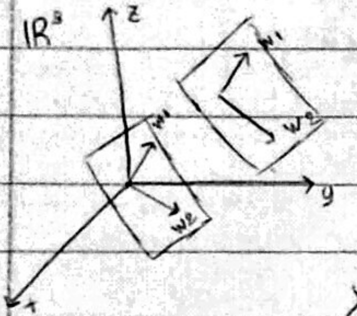
$X^{-1}(x,y,z)=(x,y)$ συνεχης

- $\left.\begin{array}{l} X_u=(1,0,f_u) \\ X_v=(0,1,f_v) \end{array}\right\} \Rightarrow X_u\times X_v\neq 0.$

Επομενως η επιφανεια ειναι κανονικη

"Τα γραφηματα ειναι παντα κανονικες επιφανειες..."

(2) Επιπεδα: $w_1\ w_2$ γραμ.



$P=P_0+\lambda w_1+\mu w_2$

Ορίζω $X: U=\mathbb{R}^2 \to \Pi\cap V$ επί $\quad V=\mathbb{R}^3$

$X(u,v)=P_0+uw_1+vw_2$ ειναι λεια με $X_u=w_1$, $X_v=w_2$.

$X_u\times X_v = w_1\times w_2\neq 0.$

$X(u_1,v_1)=X(u_2,v_2) \Rightarrow P_0+u_1w_1+v_1w_2 = P_0+u_2w_1+v_2w_2$

$\Rightarrow u_1=u_2,\ v_1=v_2 \Rightarrow X$ ειναι "1-1".

$\boxed{\begin{array}{l} P_0=(x_0,y_0,z_0) \\ w_1=(a_1,a_2,a_3) \\ w_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \end{array}}$

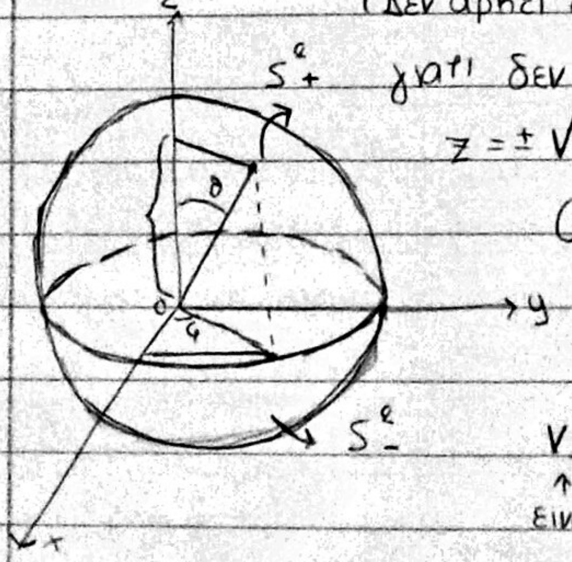
$X^{-1}:\Pi\to\mathbb{R}^2$, $X^{-1}(x,y,z)=(u,v)\Leftrightarrow (u,v)=(x,y,z)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_0+uw_1+vw_2=(x,y,z)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} ua_1+v\beta_1=x-x_0 \\ ua_2+v\beta_2=y-y_0 \end{array}} \\ ua_3+v\beta_3=z-z_0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}\neq 0} \begin{array}{l} u=\dots \text{ συνεχής συναρτ. των } (x,y,z) \\ v=\dots \quad -\|- \quad -\|- \quad -\|- . \end{array}$$

(3) Σφαιρα: $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=1\}$

(Δεν αρκει ενα συστημα συντεταγμενων γιατι δεν ειναι ισομορφισμος)



$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

Ορίζω $X_1: U_1\subseteq\mathbb{R}^2\to S^2\cap V_1=S^2_+$

$X_1(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$

$U_1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/u^2+v^2<1\}.$

$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z>0\}$

ειναι γραφημα αρα κανονικη επιφανεια.

Πρεπει να εξετασω και το κατω ημισφαιριο.

$X_2 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S^2 \cap V_2 \quad X_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$

$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z < 0\}$

Θελω αλλα 4 συστηματα (αναλογα με τον αξονα).

$X_3 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S^2 \cap V_3, \quad X_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$.

$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y > 0\}$

$X_4 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S^2 \cap V_4, \quad X_4(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$.

$V_4 = \{(x,y,z) / y < 0\}$.

$X_5(u,v) = (\sqrt{\quad}, u, v)$. $V_5 = \{(x,y,z) / x > 0\}$

$X_6(u,v) = (\sqrt{\quad}, u, v)$ $V_6 = \{(x,y,z) / x < 0\}$.

Η S_2 ειναι κανονικη.

Δεν ειναι ο μοναδικος τροπος!

β' τροπος.

$z = \cos\theta$

$x = \sin\theta\cos\varphi$

$y = \sin\theta\sin\varphi$.

$X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S^2 \cap V$ επι.

$X(\varphi,\theta) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.

$U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

$C = \{(x,y,z) / y = 0, x \geq 0\}$ ← κλειστο γιατι εχουμε 2 συνθηκες.

$\|x_\varphi \times x_\theta\|^2 = \sin^2\theta$

- Για νδο ειναι ισομορφ. πρεπει να βρω την αντιστροφη:

$X^{-1} : S^2 \cap V \to U, \quad X^{-1}(x,y,z) = (\varphi,\theta) \Leftrightarrow x(\varphi,\theta) = (x,y,z)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin\varphi\cos\theta = x \\ \sin\theta\sin\varphi = y \\ \cos\theta = z \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1} z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sin\theta} \\ \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sin\theta} \end{array} \right.$$